Heisenbergs Usikkerhedsrelationer

Jacob Nielsen[1]

Werner Heisenberg (1901-76) viste i 1927, at partiklers bølgenatur har den vidtrækkende konsekvens, at det ikke på samme tid lader sig gøre, at fastlægge en partikels position og impuls med vilkårlig nøjagtighed. Hvis vi reducerer usikkerheden på positionen – for eksempel ved at spærre en elektron inde i et brintatom – så vokser usikkerheden på impulsen. Dette udtrykkes matematisk med uligheden:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} = \hbar$$

Da Plancks konstant er lille lægger vi ikke mærke til effekten i vores makroskopiske verden, men i et brintatom betyder usikkerhedsrelationen, at planetmodellen er meningsløs. Det er selve banebegrebet, der brydder sammen. Med en bane mener vi samhørende værdier af position og hastighed hørende til et tidsinterval. En partikel, der opfører sig som en planet, skal have en relativ usikkerhed meget mindre end en på såvel impuls (hastighed) som position. Det er ikke tilfældet for elektronen i brintatomet. Den opfører sig nærmere som en bølge end som en planet.

En harmonisk bølge med bølgetal[2] k og amplitude A kan, hvis vi ser på et fast tidspunkt (t=0), beskrives med funktionen:

$$y(t) = A\sin(kx - \omega t) \qquad \wedge \qquad t = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = A\sin(kx)$$

[1] E\Fysik\Kvantemekanikkens begrebsmæssige udvikling\Heisenberg 01.wpd

[2]

$$A\sin(k(x+\lambda)) = \sin(kx) \quad \Rightarrow \quad k\lambda = 2\pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Vi danner nu en såkaldt bølgepakke[3] ved superposition af bølger med bølgetal i intervallet [k-dk ; k+dk].

$$y_{pakke}(x) = \int_{k-dk}^{k+dk} \sin(kx)\,dk = \left[-\frac{1}{x}\cos(kx) \right]_{k-dk}^{k+dk} = -\frac{1}{x}\, 2\sin(kx)\sin(dk \cdot x)$$

bemærk, at integrationen/summationen er med hensyn til k og ikke med hensyn til x.

Da den numeriske værdi af en sinusfaktor er mindre end en, ser vi,at bølgepakkens amplitude er mindre end 1/x. Vi har altså opnået, at bølgen forsvinder i det fjerne. Sinusfaktoren sin(k ·x) varierer hurtigere end faktoren sin(dk·x) den sidste faktor udgør indhyldningskurven, indenfor hvilken vi ser den hurtige svingning. På figuren på næste side ses kvadratet på funktionen $y_{pakke}(x)$. Det er nemlig bølgefunktionens kvadrat, der er et mål for sandsynligheden for at finde partiklen det pågældende sted..

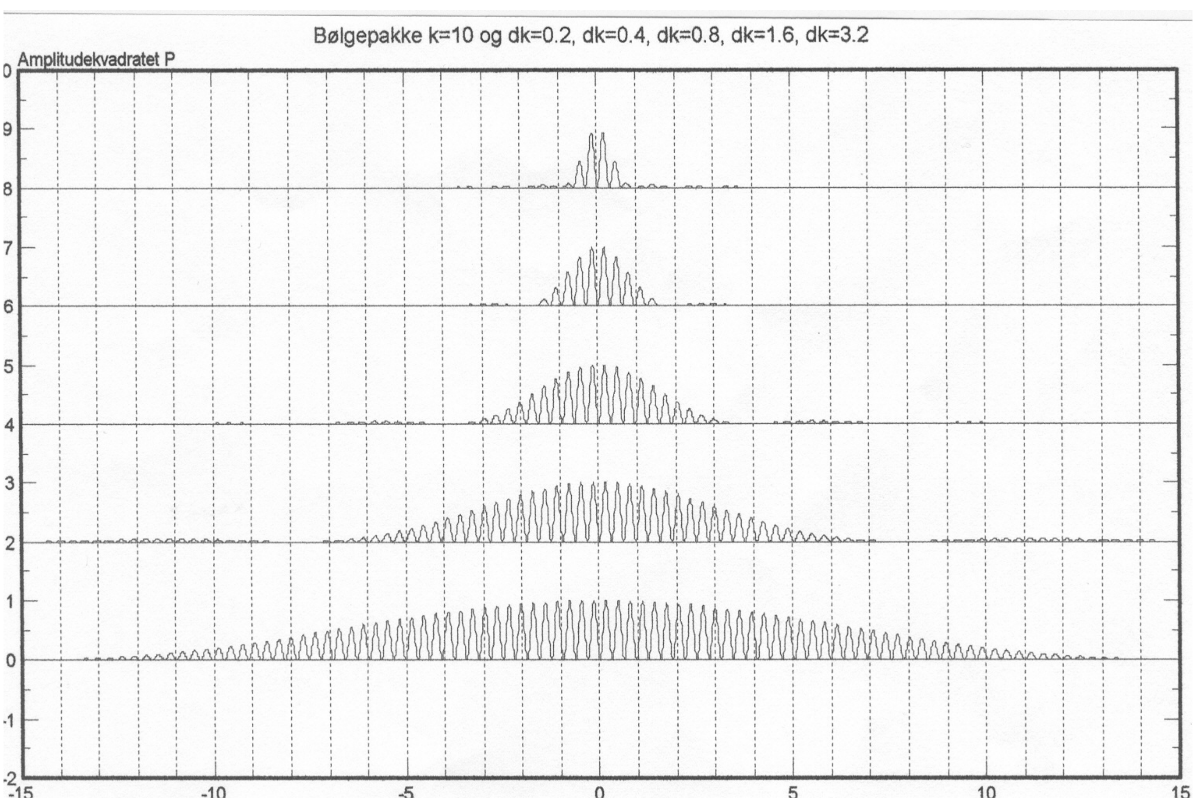
[3]Ved sidste lighedstegn benyttes additionsformlen:

$$\cos(A) - \cos(B) = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{B-A}{2}\right)$$

Figurerne nedenfor viser bølgepakker med forskellige værdier af dk. Nederste graf svarer til den mindste usikkerhed *dk* på bølgetallet og dermed den mindste usikkerhed på impulsen. Vi ser tydeligt, at bølgepakken bliver mere lokaliseret, jo større *dk* er. Vi kan altså konkludere:

Når usikkerheden på impulsen vokser, så aftager usikkerheden på positionen.

Det er præcis indholdet af en af Heisenbergs usikkerhedsrelation. Vi skal nedenfor se, hvordan vi kommer fra bølgepakkerne til usikkerhedsrelationen for impuls og position.



For at finde usikkerheden på impulsen benyttes de Broglies ligning for sammenhængen mellem impuls og bølgelængde:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \cdot k$$

$$\Downarrow \tag{1.4}$$

$$dp = \left(\frac{h}{2\pi} \right) \cdot dk$$

Vi definere nu usikkerheden på positionen *dx* som afstanden ud til det første nulpunkt for indhyldningskurven altså faktoren sin(dk x). Denne funktion bliver første gang nul, når argumentet er lig med π.

$$dk \cdot dx = \pi \tag{1.5}$$

*L*igningerne 1.4 og 1.5 kombineres.

$$dp \cdot dx = \left(\frac{h}{2\pi} \right) \cdot dk \cdot dx = \left(\frac{h}{2\pi} \right) \cdot \pi = \frac{h}{2} \geq \frac{h}{2\pi} = \hbar$$

Vores bølgepakke opfylder altså Heisenbergs usikkerhedsrelation.

Vi ser, at der er korrespondens mellem partikel- og bølgebilledet. En partikel beskrives I bølgemekanikken som en bølgepakke.

Opgaver 1 *Planetmodellen*:

Betragt en elektron, der foretager sig en jævn cirkelbevægelse med radius 0.5 Å svarende til radius af et brintatom.

a)
Beregn elektronens impuls ud fra ligningen:

$$F_{centripetal} = F_{Coulomb}$$

Sæt nu usikkerheden på x til radius, og beregn usikkerheden på impulsen ud fra Heisenbergs usikkerhedsrelation. Hvor stor bliver den relative usikkerhed på impulsen?

b)
Har det mening at tale om en bane i forbindelse med elektroner i et brintatom?

Opgaver 2 *Elektroner på makroskopisk skala*:

Afgør ud fra velvalgte beregninger om det er rimeligt, at betragte elektronen som en partikel, når den bevæger sig i fjernsynets billedrør eller i vores e/m opstilling?